Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2013

Práctica 5

1. Probar que todo Banach es isometrico a un subespacio cerrado de $(C(X), || \; ||_\infty)$ para algun compacto y Hausdorff X.

2. Sean E un espacio de Banach reflexivo. Probar que

   a) para todo ϕ en E^* existe x en E tal que $\phi(x) = \|\phi\| \, \|x\|$

   b) para todo subespacio cerrado S y x en E existe y en S tal que $d(x, y) = d(x, S)$.

3. Probar que si un espacio de Banach E es separable o reflexivo entonces toda sucesion acotada en E^* tiene una subsucesión w^*−convergente.

   Sugerencia: Hacer primero el caso separable. En el otro caso considerar el subespacio cerrado S generado por la sucesion y probar que S^* es separable.

4. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita separable o reflexivo entonces existe $\{\varphi_n\}$ en E^* con $\|\varphi_n\| = 1$ y tal que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$.

5. Sea $S \subseteq E$ un subespacio cerrado de un Banach separable y $T : S \to c_0$ lineal y acotado. Probar que existe una extension continua $\overline{T} : E \to c_0$ con $||\overline{T}|| \leq 2||T||$.

   Sugerencia: Sea $T' : E \to \ell^\infty$ que extiende a T y pensarla como $\{T'_n\} \subseteq E^*$. Probar que $d(T'_n, S^\perp) \to 0$ donde d es una metrica que define la w^*−topologia en B_{E^*}.

6. (Martingalas) Sea $\{\mathscr{F}_n\}$ una sucesion creciente de σ−algebras. Para cada n tenemos una variable aleatoria $\mathscr{F}_n$-medible X_n tal que $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n$. Si $p > 1$ y para todo n se tiene $||X_n||_p < 1$ demostrar que existe X de forma que $X_n = \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n)$.

7. Se tiene una matriz de numeros no negativos tal que cada fila y cada columna tienen suma 1. Demostrar que es combinacion convexa de matrices de permutacion.

8. Calcular los extremales de $C(X)$ para X un espacio metrico y compacto.

   a) Demostrar que si $C(X)$ es isometrico a $C(Y)$ entonces X es homeomorfo a Y.

   b) Demostrar que toda medida en X es w^*−limite de suma de puntuales.

9. Si E es un espacio normado, demostrar que la bola unitaria de E^* tiene al menos un punto extremal. Concluir que c_0 no es el dual de nadie.

10. Decimos que $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ es armonica discreta si

    $$f(m, n) = \frac{1}{4}(f(m, n+1) + f(m+1, n) + f(m, n-1) + f(m-1, n)).$$

    Demostrar que toda funcion armonica discreta acotada es constante.

    Sugerencia: Calcular los extremales del conjunto de tales f con $||f||_\infty \leq 1$ en $L^\infty(\mathbb{Z}^2)$.

11. Sea X metrico compacto con $T : X \to X$ biyectiva y continua. Probar que existe una medida de probabilidad invariante por T. Mas aun, existe una ergodica.

12. Todo grupo abeliano localmente compacto admite una medida de Haar.

13. Sea E un espacio normado y G una familia de endomorfismos que conmutan. Dado un subespacio cerrado S invariante por G, demostrar que toda $\phi : S \to \mathbb{R}$ lineal e invariante por G se puede extender a una invariante con la misma norma.